

5. cvičení - teorie

Věta 20 (derivace složené funkce). Necht' $r, s \in \mathbb{N}$ a necht' $G \subset \mathbb{R}^s, H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Necht' $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G), f \in C^1(H)$ a bod $[\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)] \in H$ pro každé $x \in G$. Potom složená funkce $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)), x \in G,$$

je třídy C^1 na G . Necht' $a \in G$ a $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Věta 21 (záměnnost parciálních derivací). Necht' $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce f má na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ obě parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a tyto funkce jsou v bodě a spojitě. Pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Věta 22 (o implicitní funkci). Mějme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a bod $[x_0, y_0] \in G$. Uvažujme funkci $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ splňující:

- (i) $F \in C^1(G)$,
- (ii) $F(x_0, y_0) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje U okolí bodu x_0 (v $\mathbb{R}^n$) a okolí V bodu y_0 (v $\mathbb{R}$) taková, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ splňující $F(x, y) = 0$. Označíme-li tot y jako $\varphi(x)$, pak takto vzniklá funkce $\varphi \in C^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \text{ pro } x \in U, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Definice (Tečná nadrovina). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n, a \in G, f \in C^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je *tečná nadrovina* ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Poznámka (Prohození souřadnic). Chceme-li ukázat, že zadaná rovnost určuje implicitně zadanou funkci jiných proměnných, než obvykle, stačí v postupu prohodit souřadnice. Vizte příklad níže.

Příklad. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci φ proměnné y . (nikoli proměnné x).

Postup bude stejný, akorát tam, v postupu prohodíme výskyty F'_x, F'_y - tj. při ověřování (iii) ve větě 22 budeme zjišťovat, zda $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$ atd.

Návod

- anulujeme rovnici a nenulovou stranu označíme jako $F(x, y)$, resp. $F(x, y, z)$
- spočteme parciální derivace
- ověříme předpoklady věty 22
- dle věty 22 spočteme $\varphi'_x((x_0, y_0))$, resp. $\varphi'_x(x_0, y_0, z_0), \varphi'_y(x_0, y_0, z_0)$
- dosadíme spočtené do tečné nadroviny z definice

Výpočet druhé derivace φ pomocí řetízkového pravidla (věty 20)

$$\text{Máme } \varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}.$$

Zderivováním podle x dostaneme

$$\varphi''(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} F'_x(x, \varphi(x)) \cdot F'_y(x, \varphi(x)) - F'_x(x, \varphi(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} F'_y(x, \varphi(x))}{(F'_y(x, \varphi(x)))^2}.$$

Podle řetízkového pravidla platí následující.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F'_x(x, \varphi(x)) &= (F'_x(x, \varphi(x)))'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial x}(x) + (F'_x(x, \varphi(x)))'_y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = \\ &= F''_{x,x}(x, \varphi(x)) + F''_{x,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F'_y(x, \varphi(x)) &= (F'_y(x, \varphi(x)))'_x \cdot \frac{\partial x}{\partial x}(x) + (F'_y(x, \varphi(x)))'_y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = \\ &= F''_{y,x}(x, \varphi(x)) + F''_{y,y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že

$$\varphi'' = -\frac{(F''_{x,x} + F''_{x,y} \cdot \varphi') \cdot F'_y - F'_x \cdot (F''_{y,x} + F''_{y,y} \cdot \varphi')}{(F'_y)^2}$$